შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

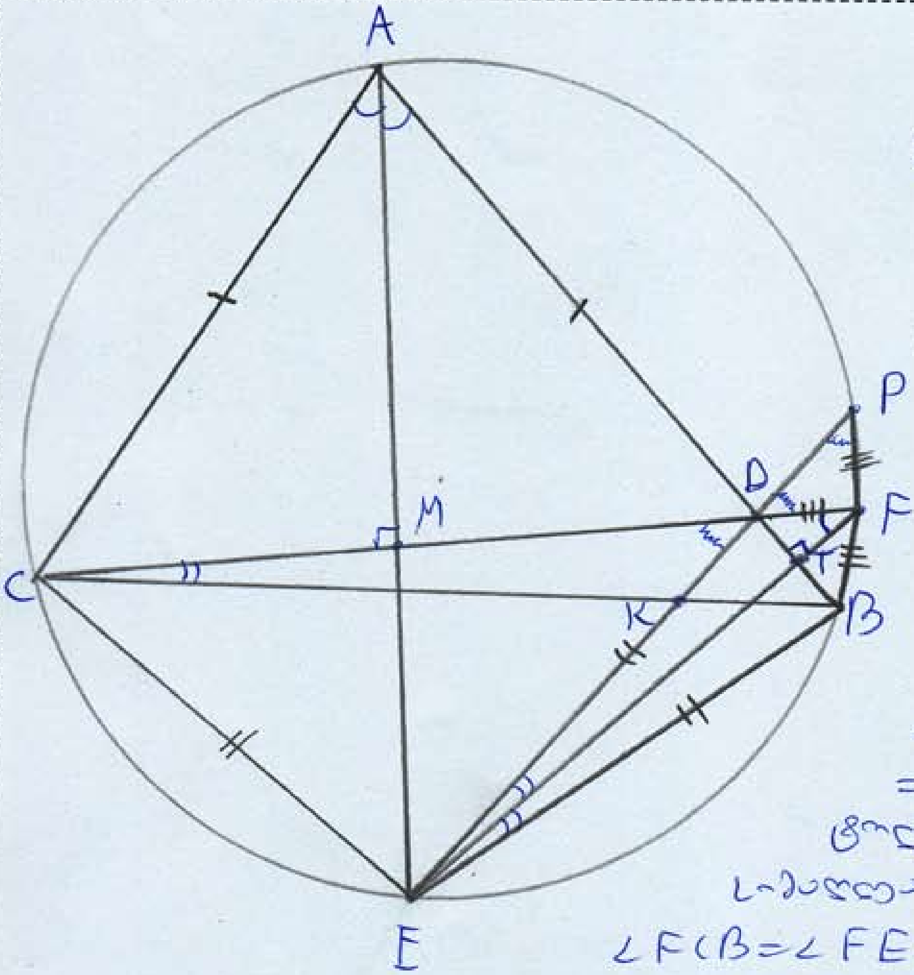
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 303

ამოცანა № 4

გვერდი № 1



$AC = AD$ და AM ბისექტრისაა $\Rightarrow AM \perp CD$.

$\angle CFE = \frac{\breve{CE}}{2} = \angle CAE = \angle EAB \Rightarrow$
$\Rightarrow AMTF$ ციკლურია $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DTF = \angle AMD = 90°$.

AE $\angle CAB$-ს ბისექტრისაა $\Rightarrow$
$\Rightarrow \breve{CE} = \breve{EB} \Rightarrow$
$\Rightarrow CE = EB$, ამასთან E არის CD-ს შუამართობზე $\Rightarrow CE = ED \Rightarrow$
$\Rightarrow CE = ED = EB$

ტოლფერდა $\triangle DEB$-ში ET სიმაღლეა $\Rightarrow \angle FEB = \angle DEF$, ამასთან $\angle FCB = \angle FEB$.

გავაგრძელოთ ED სანამ წრეწირს გადაკვეთს P-ში. მაშინ $\breve{PF} = \breve{FB} \Rightarrow PF = FB$. ამასთან F არის BD-ს შუამართობზე $\Rightarrow FD = FB \Rightarrow FP = FD = FB$.

განვიხილოთ $\triangle CKD$-ში და $\triangle EFP$-ში:

$\angle DCK = \angle PEF$, $\angle CDK = \angle PDF = \angle EPF \Rightarrow \triangle CKD \sim \triangle EFP \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CK}{KD} = \frac{EF}{FP} \Rightarrow \begin{cases} \frac{CK}{KD} = \frac{EF}{FD} \ (1) \\ \frac{AC}{DK} = \frac{EF}{DF} \ (2) \end{cases}$ პტოლემეოსიდან $DK \cdot EF = AC \cdot DF \Rightarrow$ (1) და (2) მივიღეთ, რომ: $AC = KC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CK}{AC} = 1$. პასუხი: $\frac{CK}{AC} = 1$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 303

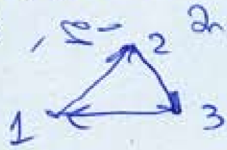
ამოცანა № 5

გვერდი № 1

ამოცანას ვაჩვენებთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით m-ის მიმართ.

როცა $m=1$-ს.

ნათელია n კაცში $m=1$-ისთვის ყველას უნდა ქონდეს ... წაგებაში $\Rightarrow$ n-ის მაქსიმალური მნიშვნელობა 3, და მიიღწევა შემდეგნაირად:



I-მა მოიგო II-ს, II-მ — III-ს, ხოლო III-მ მოიგო I-ს. მაშასადამე: $n_{მაქ} = 3 = 2^{1+1}-1$.

ვთქვათ როცა $m=k$-ს, მაშინ ვიცით რომ ამოცანის პირობა სრულდება, როცა მაქსიმუმ $n=2^{k+1}-1$ კაცია.

როცა $m=k+1$-ს:

ვაჩვენოთ რომ n-ის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა შემდეგნაირად: $n_{მაქ(k+1)} = 2 \cdot n_{მაქ,k}+1$, მაშინ ვიღებთ: $2(2^{k+1}-1)+1 = 2^{k+2}-1$ — და ამოცანა ამოხსნილი იქნება.

შევნიშნოთ, რომ თითოეულ მონაწილეს უნდა ქონდეს წაგებული სულ ცოტა m მონაწილისგან, რადგან თუ მან წააგო მხოლოდ $p<m$ მონაწილისგან, მაშინ რომ ავიღოთ ისეთი m-ეული, სადაც შედის ყველა ის მონაწილე და კიდევ დარჩენილი [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 303

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$P(x)=(x+d_1)(x+d_2)\cdot\ldots\cdot(x+d_9)$. $d_i\in\mathbb{N}$.

$d=\max\{d_1,d_2,\ldots,d_9\}$. $m>d^8$.

შევნიშნოთ, რომ 20-ზე ნაკლები ან ტოლი მარტივი რიცხვები სულ არის 8 ცალი:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

ჩვენ თუ დავამტკიცებთ, რომ $P(m)$-ს ექნება 9 მაინც წყვილ-წყვილად განსხვავებული მარტივი გამყოფი, ამით ამოცანა ამოხსნილი იქნება, რადგან რომელიღაც მარტივი გამყოფი 20-ზე მეტი აღმოჩნდება.

$P(m)=(m+d_1)\cdot(m+d_2)\cdot\ldots\cdot(m+d_9)$.

ცხადია $(m+d_i)\not\vdots\,(m+d_j)$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიქნებოდით თუ $d_i>d_j\Rightarrow$

$\Rightarrow m+d_i\geq 2(m+d_j)\Rightarrow d_i-2d_j\geq m$ რაც აბსურდია, რადგან $m>d_i^8$

უსგ$(m+d_i, m+d_j)=$ უსგ$(d_i-d_j, m+d_j)\leq d_i-d_j$.

ასევე შევნიშნოთ, რომ:

$P(m)=m\cdot A+d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_9\Rightarrow$ რადგანაც $d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_9<m\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P(m)\equiv d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_9 \pmod m}$.

და ვაჩვენებთ, რომ: $((d_i+m)\vdots\,p$ და $(d_j+m)\not\vdots\,p)$ და $(d_j+m)\vdots\,q$ და $(d_i+m)\not\vdots\,q)$, მაშინ გვექნება:

$(m+d_1)\vdots\,p_1$, $(m+d_2)\vdots\,p_2$ და $p_2\neq p_1$.

$(m+d_3)\vdots\,p_3$ და $p_1\neq p_3$ და $p_2\neq p_3$

$(m+d_9)\vdots\,p_9$ და $p_9\neq p_i$. $i\in\overline{1,8}$

ეს ამოცანა დამტკიცებული იქნება.